Estadística

Soluciones ejercicios: Probabilidad

Versión 8

Emilio Letón

1. Nivel 1

1. Demostrar las propiedades siguientes relativas a las operaciones con sucesos

	Unión	Intersección
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificación	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
Absorción	$A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$

SOLUCIÓN:

A modo de ejemplo se probará la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección, es decir

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

En primer lugar se prueba la inclusión " $\subset$ ". Para ello se supone que $x \in A \cup (B \cap C)$, por lo que $x \in A$ ó $x \in B \cap C$. En ambos casos $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ya que si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$ y en el otro caso si $x \in B \cap C \Rightarrow x \in B$ y $x \in C \Rightarrow x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$.

En segundo lugar se prueba la inclusión " $\supset$ ". Para ello se supone que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, con lo que $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$. Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$ y si $x \notin A$, al ser $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$, se tiene que $x \in B \cap C$ y por tanto $x \in A \cup (B \cap C)$.

2. Decir si es verdera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo, y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo:

"Si A y B son dos sucesos cualesquiera se verifica que $A \cup B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$."

SOLUCIÓN:

Es verdadera.

En primer lugar se prueba la inclusión " $\subset$ ". Para ello se supone que $x \in A \cup B$, por lo que $x \in A$ ó $x \in B$. Si $x \in A$ y $x \notin B \Rightarrow x \in A \cap \overline{B}$ y por tanto $x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$. Si $x \notin A$ y $x \in B \Rightarrow x \in \overline{A} \cap B$ y por tanto $x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$. Por último si $x \in A$ y $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$ y por tanto $x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$.

En segundo lugar se prueba la inclusión " $\supset$ ". Si . $x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in A \cap \overline{B}$ ó $x \in \overline{A} \cap B$ ó $x \in A \cap B$. Y en cualquier caso se tiene que $x \in A \cup B$.

3. Demostrar las Leyes de Morgan para la unión y la intersección de sucesos. Es decir, demostrar que:

   a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. En general $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

   b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.En general $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

   SOLUCIÓN:

   a) En primer lugar se prueba la inclusión " $\subset$ ". Para ello si $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A$ y $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. En segundo lugar se prueba la inclusión " $\supset$ " de forma análoga a la inclusión " $\subset$ ". El caso general se prueba por inducción.

   b) Análogo al caso a).

4. Si en una tarea manual existe una probabilidad de cometer un fallo igual a 0,01, si esta operación hay que repetirla 100 veces, ¿cuál será la probabilidad de cometer al menos un fallo en las 100 repeticiones?

   SOLUCIÓN:

   Sea F el suceso "cometer al menos un fallo" y sea F_i el suceso "cometer un fallo en el movimiento i", se trata, por tanto, de calcular $P(F)$, que es igual a

$$P(F) = 1 - P\left(\overline{F}\right) = 1 - P\left(\overline{F_1} \cap ... \cap \overline{F_n}\right) = 1 - \left[(1 - 0{,}01)^{100}\right] = 0{,}63.$$

5. Sean A y B sucesos compatibles e independientes con $P\left(\overline{B}\right) = \frac{1}{4}$ y con $P(A) = \frac{1}{8}$. Determinar:

   a) $P(B \mid A)$.

   b) $P(A \cap B)$.

   c) $P(A \cup B)$.

   d) $P(A \mid A \cup B)$

   e) $P(B \mid A \cup B)$

   f) Si C es tal que $P(C) = \frac{3}{8}$, ¿pueden ser B y C incompatibles?

   SOLUCIÓN:

   a) $P(B \mid A) \overset{ind.}{=} P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

   b) $P(A \cap B) \overset{ind.}{=} P(A)\,P(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{32} = 0{,}094$.

   c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{3}{32} = \frac{25}{32} = 0{,}78$.

   d) Para calcular $P(A \mid A \cup B)$ se observa que

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)}$$

   por lo que $P(A \mid A \cup B) = \frac{1/8}{25/32} = \frac{32}{200} = 0{,}16$.

   e) De forma análoga al apartado anterior $P(B \mid A \cup B) = \frac{P(B)}{P(A \cup B)} = \frac{3/4}{25/32} = \frac{24}{25} = 0{,}96$.

   f) Si B y C fueran incompatibles entonces $B \cap C = \varnothing$ con lo que $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8} > 1$, con lo que se llegaría a un absurdo, por lo que B y C no pueden ser incompatibles.

6. ¿Cuántos subconjuntos se pueden formar de un conjunto de n elementos?

   SOLUCIÓN:

   Se pueden formar $\binom{n}{0}$ subconjuntos con 0 elementos , $\binom{n}{1}$ subconjuntos con 1 elementos, $\binom{n}{2}$ subconjuntos con 2 elementos, ..., $\binom{n}{n}$ subconjuntos con n elementos. En total se pueden formar

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

7. En una prueba diagnóstica se sabe que $P\left(- \mid Sano\right) = 98\,\%$ y que $P\left(+ \mid Enf\right) = 98\,\%$. Esta prueba diagnóstica se aplica a un individuo y da positivo, ¿qué probabilidad tiene de estar enfermo? (elegir una de las siguientes contestaciones):

   a) Entre $(0, 0{,}2]$.
   b) Entre $(0{,}2, 0{,}4]$.
   c) Entre $(0{,}4, 0{,}6]$.
   d) Entre $(0{,}6, 0{,}8]$.
   e) Entre $(0{,}8, 1]$.
   f) No hay datos suficientes para saber la probabilidad que se pide.

   SOLUCIÓN:

   La respuesta correcta es la f), ya que para poder aplicar el Teorema de Bayes se necesita saber $P\left(Enf\right)$.

8. En una prueba diagnóstica se sabe que $P\left(- \mid Sano\right) = 98\,\%$ y que $P\left(+ \mid Enf\right) = 98\,\%$ y además que la $P\left(Enf\right) = 0{,}04$. Esta prueba diagnóstica se aplica a un individuo y da positivo, ¿qué probabilidad tiene de estar enfermo? (elegir una de las siguientes contestaciones):

   a) Entre $(0, 0{,}2]$.
   b) Entre $(0{,}2, 0{,}4]$.
   c) Entre $(0{,}4, 0{,}6]$.
   d) Entre $(0{,}6, 0{,}8]$.
   e) Entre $(0{,}8, 1]$.
   f) No hay datos suficientes para saber la probabilidad que se pide.

   SOLUCIÓN:

   La respuesta correcta es la d), aplicando el Teorema de Bayes:

$$P\left(Enf|+\right) = \frac{P\left(+|Enf\right)P\left(Enf\right)}{P\left(+|Enf\right)P\left(Enf\right) + P\left(+|Sano\right)P\left(Sano\right)}$$

$$= \frac{0{,}98 \cdot 0{,}04}{0{,}98 \cdot 0{,}04 + 0{,}02 \cdot 0{,}96} = 0{,}67$$

   Obsérvese que el resultado correcto está muy alejado de ser muy alto (es porque la $P\left(Enf\right)$ es baja) y que desde luego no es 0.98.

9. Una aseguradora tiene clientes de riesgo alto, medio y bajo. Estos clientes tienen probabilidades de 0,02, 0,01 y 0,0025 de rellenar un impreso de reclamación. Si la proporción de clientes de alto riesgo es 0,1, de riesgo medio 0,2 y de bajo riesgo es 0,7. ¿Cuál es la probabilidad de que un impreso rellenado sea de un cliente de alto riesgo?

   SOLUCIÓN:

   Se definen los sucesos:

   $A =$"el cliente es de alto riesgo", $M =$"el cliente es de medio riesgo", $B =$"el cliente es de bajo riesgo" y $R =$"el cliente reclama". Con esta notación, se tiene por los datos del enunciado que

$$P(R|A) = 0,02;\ P(A) = 0,1$$
$$P(R|M) = 0,01;\ P(M) = 0,2$$
$$P(R|B) = 0,0025;\ P(B) = 0,7$$

   Observar que $P(R|A) + P(R|M) + P(R|B)$ no tiene por qué ser 1. Lo que sí tiene que verificarse es que $P(A|R) + P(M|R) + P(B|R) = 1$ y que $P(A) + P(M) + P(B) = 1$.

   La probabilidad solicitada, por el teorema de Bayes, es

$$\begin{aligned} P(A|R) &= \frac{P(R|A)\,P(A)}{P(R|A)\,P(A) + P(R|M)\,P(M) + P(R|B)\,P(B)} \\ &= \frac{0,02 \cdot 0,1}{0,02 \cdot 0,1 + 0,01 \cdot 0,2 + 0,0025 \cdot 0,7} = 0,3478 \end{aligned}$$

10. Un componente eléctrico se empaqueta en lotes de 25 unidades. Se rechaza el lote si al inspeccionar un máximo de dos componentes alguno es defectuoso.

    a) Un inspector realiza el siguiente procedimiento de inspección: extrae primeramente un componente; si resulta defectuoso se rechaza el lote. Si este primer componente es aceptable se extrae el segundo. Si este segundo también es aceptable se acepta el lote entero.

    b) Un segundo inspector utiliza un aparato donde introduce dos componentes simultáneamente, rechazando el lote si alguno es defectuoso.

    Cierto lote contiene 4 componentes defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar ese lote por cada uno de los inspectores?

    SOLUCIÓN:

    a) Se definen los sucesos:

    $R_1 =$"el inspector 1 rechaza el lote", $D_1 =$"el primer componente es defectuoso", $D_2 =$"el segundo componente es defectuoso" y $R_2 =$"el inspector 2 rechaza el lote". Con esta notación, se tiene que

$$\begin{aligned} P(R_1) &= P\left(D_1 \cup \left(\overline{D}_1 \cap D_2\right)\right) = P(D_1) + P\left(\overline{D}_1 \cap D_2\right) - P\left(D_1 \cap \left(\overline{D}_1 \cap D_2\right)\right) \\ &= P(D_1) + P\left(\overline{D}_1\right) P\left(D_2|\overline{D}_1\right) = \frac{4}{25} + \frac{21}{25} \cdot \frac{4}{24} = 0,16 + 0,14 = 0,30 \end{aligned}$$

    b) Para el segundo inspector:

$$P(R_2) = 1 - P\left(\overline{R}_2\right) = 1 - \frac{\binom{21}{2}}{\binom{25}{2}} = 1 - \frac{\frac{21!}{2!19!}}{\frac{25!}{2!23!}} = 1 - \frac{\frac{21 \cdot 20}{2}}{\frac{25 \cdot 2 \cdot 4}{2}} = 0,30$$

    Por lo que la probabilidad de rechazar ese lote es igual para cada inspector.

11. Se aplica una prueba médica T para detectar la presencia de alergias en los trabajadores de una fábrica. Se admite, por los estudios realizados en este sector laboral, que la proporción de individuos con alergia en este tipo de trabajadores es del 14 %. En tales estudios se ha establecido que aproximadamente el 17 % de los individuos da positivo y el 5 % de las personas con alergia dan negativo. Calcular:

   a) La proporción de trabajadores que no tienen alergia y dan positivo.

   b) La proporción de trabajadores que tienen alergia y dan negativo

   SOLUCIÓN:

   a) Se definen los sucesos:
   $A =$"la persona tiene alergia" y $T =$"el test da positivo". Con esta notación, se tiene por los datos del enunciado que

   $$P(A) = 0,14;\ P(T) = 0,17$$

   $$P\left(\overline{T}|A\right) = 0,05$$

   La probabilidad solicitada es $P\left(\overline{A} \cap T\right)$, que es

   $$P\left(\overline{A} \cap T\right) = P\left(T|\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right)$$

   y dado que, por el teorema de la probabilidad total, se tiene que

   $$P(T) = P\left(T|\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right) + P(T|A) P(A)$$

   por lo que

   $$P\left(T|\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right) = P(T) - P(T|A) P(A) = 0,17 - (1 - 0,05) \cdot 0,14 = 0,037$$

   con lo que $P\left(\overline{A} \cap T\right) = 0,037$.

   b) Se pide calcular $P\left(A \cap \overline{T}\right)$, que es

   $$P\left(A \cap \overline{T}\right) = P\left(\overline{T}|A\right) P(A) = 0,05 \cdot 0,14 = 0,007$$

12. Una caja contiene 24 bombillas, de las cuales 4 son defectuosas. Si una persona selecciona 4 sin reeemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que las 4 sean defectuosas?

   SOLUCIÓN:

   La probabilidad de que las 4 sean defectuosas es

   $$\frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{20}{0}}{\binom{24}{4}} = 0,00009$$

   Otra forma es calcular

   $$\frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} \cdot \frac{2}{22} \cdot \frac{1}{21} = 0,00009$$

13. En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0,1. Si este se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0,95. La probabilidad de que la alarma funcione sin haber existido peligro es 0,03. Hallar la probabilidad de que habiendo funcionado la alarma no haya existido peligro.

SOLUCIÓN:

Se definen los sucesos: $D =$"existe peligro" y $A =$"suena la alarma". Con esta notación, se tiene por los datos del enunciado que

$$P(D) = 0,10$$

$$P(A|D) = 0,95; \; P\left(A|\overline{D}\right) = 0,03$$

La probabilidad solicitada, por el teorema de Bayes, es

$$P\left(\overline{D}|A\right) = \frac{P\left(A|\overline{D}\right)P\left(\overline{D}\right)}{P\left(A|\overline{D}\right)P\left(\overline{D}\right) + P(A|D)P(D)} = \frac{0,03 \cdot 0,90}{0,03 \cdot 0,90 + 0,95 \cdot 0,10} = 0,2213$$

2. Nivel 2

1. Decir si son verderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas demostrarlo, y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo:

   a) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

   b) Si se define la diferencia de dos sucesos A y B como $A - B = A \cap \overline{B}$, entonces se verifica que $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

   c) $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$.

   d) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

   SOLUCIÓN:

   a) Verdadero. Al ser $E = A \cup \overline{A}$ ($A, \overline{A}$ disjuntos) $\Rightarrow 1 = P(E) = P(A) + P\left(\overline{A}\right) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   b) Falso. Dado que $A = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. Sólo en el caso de que $B \subset A$, se tiene que $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

   c) Verdadero. Al ser $A \cup B = (A - B) \cup B \Rightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$.

   d) Verdadero. Al ser $B = A \cup (B - A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A)$.

2. Decir si son verderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas demostrarlo, y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo:

   a) $\overline{A}, \overline{B}$ independientes $\Leftrightarrow A, B$ independientes.

   SOLUCIÓN:

   a) En primer lugar,se prueba que si $\overline{A}, \overline{B}$ independientes $\Rightarrow A, B$ independientes. Para ello, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \\ &= 1 - \left[P\left(\overline{A}\right) + P\left(\overline{B}\right) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)\right] = 1 - P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \\ &\overset{ind.}{=} 1 - P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right) = P(A) - P\left(\overline{B}\right)\left(1 - P\left(\overline{A}\right)\right) \\ &= P(A) - P\left(\overline{B}\right)P(A) = P(A)\left(1 - P\left(\overline{B}\right)\right) = P(A)P(B) \end{aligned}$$

   con lo que, al ser $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, se tiene que A, B independientes.

En segundo lugar, se prueba que si A, B independientes $\Rightarrow \overline{A}, \overline{B}$ independientes. Para ello, se tiene que:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right)$$
$$= 1 - \left[P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)\right] = 1 - P\left(A\right) - P\left(B\right) + P\left(A \cap B\right)$$
$$\overset{ind.}{=} 1 - P\left(A\right) - P\left(B\right) + P\left(A\right) P\left(B\right) = P\left(\overline{A}\right) - P\left(B\right)\left(1 - P\left(A\right)\right)$$
$$= P\left(\overline{A}\right) - P\left(B\right) P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A}\right)\left(1 - P\left(B\right)\right) = P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{B}\right)$$

con lo que, al ser $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{B}\right)$, se tiene que $\overline{A}, \overline{B}$ independientes.

3. Decir si son verderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas demostrarlo, y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo:

   a) Si dos sucesos A y B con $P\left(A\right), P\left(B\right) > 0$ son incompatibles entonces son dependientes.

   b) Si dos sucesos A y B con $P\left(A\right), P\left(B\right) > 0$ son independientes entonces son compatibles.

   SOLUCIÓN:

   a) Verdadera. Si fueran independientes $P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right)$, pero como son incompatibles $P\left(A \cap B\right) = 0$, lo cual es imposible porque $P\left(A\right), P\left(B\right) > 0$.

   b) Verdadera. Análogo al caso a).

4. Decir si son verderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas demostrarlo, y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo:

   a) Si $A = B \cup C$ entonces $P\left(B \mid A\right) = \frac{P(B)}{P(A)}$.

   b) $P\left(\left(A \cup B\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right)\right) = P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$.

   c) $P\left(\overline{\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)}\right) = P\left(A \cup B\right)$.

   d) $P\left(A \cap B \cap C\right) = P(A \mid B \cap C) P\left(B \mid C\right) P\left(C\right)$.

   e) $P\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \left(A \cap B\right)}\right) = 0$.

   SOLUCIÓN:

   a) Verdadera. $P\left(B \mid A\right) = P\left(B \mid B \cup C\right) = \frac{P(B \cap (B \cup C))}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$

   b) Falsa. $P\left(\left(A \cup B\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right)\right) = P\left[A \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\right] = P\left[\left(A \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right] = P\left(A \cap \overline{B}\right)$.

   c) Falsa. $P\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right) = P\left(\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}\right) = P\left(A \cap B\right)$.

   d) Es verdadera.

   Se verifica que:

$$P(A \mid B \cap C) P\left(B \mid C\right) P\left(C\right) = \frac{P\left(A \cap B \cap C\right)}{P\left(B \cap C\right)} \frac{P\left(B \cap C\right)}{P\left(C\right)} P\left(C\right) = P\left(A \cap B \cap C\right)$$

   e) Es verdadera.

   Se verifica que el conjuto dado es el vacío y , por tanto, su probabilidad es nula.

$$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \left(A \cap B\right) = \overline{A} \cup \left[\left(\overline{B} \cup A\right) \cap \left(\overline{B} \cup B\right)\right] = \overline{A} \cup \left[\left(\overline{B} \cup A\right) \cap E\right]$$
$$= \overline{A} \cup \left(\overline{B} \cup A\right) = \overline{A} \cup A \cup \overline{B} = E \cup \overline{B} = E. \Rightarrow \overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \left(A \cap B\right)} = \overline{E} = \varnothing$$

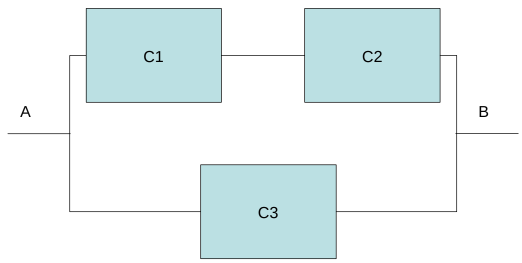

Figura 1: Red de comunicaciones

5. Demostrar que

   a) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

   b) Utilizando a) probar que $P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$.

   c) Utilizando inducción probar que $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

   SOLUCIÓN:

   a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$.

   b) $P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) \leq P(A \cup B) + P(C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$.

   c) Para $n = 2$ se cumple. Se supone que se cumple para n y se prueba que también se cumple para $n + 1$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i).$$

6. En el circuito eléctrico de 3 componentes concectados según la Figura 1, la probabilidad de que funcione cada uno de los componentes es independiente de los demás, siendo la probabilidad de que funcione el componente 1 de 0.9, el componente 2 de 0,8 y el componente 3 de 0,7. El circuito funciona si entre A y B es posible encontrar un camino de componentes que funcione. Con los supuestos anteriores, calcular la probabilidad de que el circuito funcione.

   SOLUCIÓN:

   Si se denota por C_{123} al suceso "el circuito funciona", por C_{12} al suceso "el subcircuito formado por los componentes 1 y 2 funciona" y por C_3 al suceso "el subcircuito formado por el componente 3 funciona", la probabilidad que se pide es

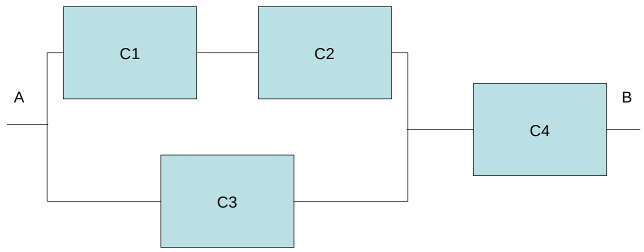

Figura 2: Red de comunicaciones

$$P(C_{123}) = 1 - P\left(\overline{C_{123}}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{12}} \cap \overline{C_3}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{12}}\right) P\left(\overline{C_3}\right) = 1 - (1 - P\left(C_{12}\right)) P\left(\overline{C_3}\right)$$

$$= 1 - (1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8)0{,}3 = 0{,}916$$

7. En la red de comunicaciones de 4 componentes concectados según la Figura 2, la probabilidad de que funcione cada uno de los componentes es independiente de los demás, siendo la probabilidad de que funcione el componente 1 de 0.9, el componente 2 de 0,8, el componente 3 de 0,75 y el componente 4 de 0,85. La red funciona si entre A y B es posible encontrar un camino de componentes que funcione. Con los supuestos anteriores, calcular la probabilidad de que no haya comunicación entre A y B.

   SOLUCIÓN:

   Si se denota por C_{1234} al suceso "la red funciona", por C_{123} al suceso "la subred formada por los componentes 1, 2 y 3 funciona", por C_{12} al suceso "la subred formada por los componentes 1 y 2 funcionaz por C_4 al suceso "la subred formada por el componente 4 funciona", la probabilidad que se pide es

$$P(\overline{C_{1234}}) = 1 - P\left(C_{1234}\right) = 1 - P\left(C_{123} \cap C_4\right) = 1 - P\left(C_{123}\right) P\left(C_4\right) = 1 - \left[1 - P\left(\overline{C_{123}}\right)\right] P\left(C_4\right)$$

$$= 1 - \left[1 - P\left(\overline{C_{12}} \cap \overline{C_3}\right)\right] P\left(C_4\right) = 1 - \left[1 - P\left(\overline{C_{12}}\right) P\left(\overline{C_3}\right)\right] P\left(C_4\right)$$

$$1 - \left[1 - (1 - P\left(C_1\right) P\left(C_2\right)) P\left(\overline{C_3}\right)\right] P\left(C_4\right) = 1 - [1 - (1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8) \cdot 0{,}25] \cdot 0{,}85 = 0{,}21.$$

8. En la red de comunicaciones de 9 componentes conectados según la Figura 3, la probabilidad de que funcione cada componente C_i es de p. La red funciona si entre A y B es posible encontrar un camino de componentes que funcione. Se supone que la probabilidad de funcionar cada componente es independiente de los demás. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya comunicación entre A y B?

   SOLUCIÓN:

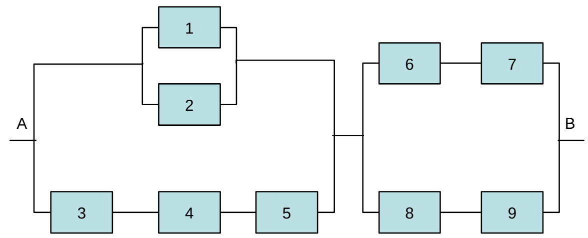

Figura 3: Red de comunicaciones

Si se denota por $C_{123456789}$ al suceso "la red formada por los componentes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 funciona", por C_{12345} "la subred formada por los componentes 1, 2, 3, 4 y 5 funciona", y por C_{6789} "la subred formada por los componentes 6, 7, 8 y 9 funciona", la probabilidad requerida en la pregunta es $P(\overline{C_{123456789}})$ que viene dada por:

$$P(\overline{C_{123456789}}) = 1 - P\left(C_{123456789}\right) = 1 - P\left(C_{12345} \cap C_{6789}\right) = 1 - P\left(C_{12345}\right) P\left(C_{6789}\right)$$

La probabilidad $P\left(C_{12345}\right)$ es

$$P\left(C_{12345}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{12345}}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{12}}\right) P\left(\overline{C_{345}}\right) = 1 - \left(P\left(\overline{C_1}\right) P\left(\overline{C_2}\right)\right)\left(1 - P\left(C_{345}\right)\right)$$

$$= 1 - \left((1-p)^2\right)\left(1 - p^3\right) = 1 - \left(1 + p^2 - 2p\right)\left(1 - p^3\right)$$

$$= 1 - \left(1 - p^3 + p^2 - p^5 - 2p + 2p^4\right) = p^3 - p^2 + p^5 + 2p - 2p^4$$

y de forma análoga $P\left(C_{6789}\right)$ es

$$P\left(C_{6789}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{6789}}\right) = 1 - P\left(\overline{C_{67}}\right) P\left(\overline{C_{89}}\right) = 1 - \left(1 - P\left(C_{67}\right)\right)\left(1 - P\left(C_{89}\right)\right)$$

$$= 1 - \left(1 - p^2\right)\left(1 - p^2\right) = 1 - \left(1 + p^4 - 2p^2\right) = -p^4 + 2p^2$$

por lo que la probabilidad de que no haya comunicación es

$$P(\overline{C_{123456789}}) = 1 - \left(p^3 - p^2 + p^5 + 2p - 2p^4\right)\left(-p^4 + 2p^2\right)$$

$$= 1 - \left(-p^7 + 2p^5 + p^6 - 2p^4 - p^9 + 2p^7 - 2p^5 + 4p^3 + 2p^8 - 4p^6\right)$$

$$= 1 - \left(-p^9 + 2p^8 + p^7 - 3p^6 - 2p^4 + 4p^3\right)$$

$$= 1 + p^9 - 2p^8 - p^7 + 3p^6 + 2p^4 - 4p^3$$

9. Un aparato está compuesto por cuatro componentes que funcionan o no de forma independiente entre sí. Las probabilidades de fallo del componente i-ésimo son $p_1 = 0,1, p_2 = 0,2, p_3 = 0,3$ y $p_4 = 0,4$. Se sabe que dos de los cuatro componentes han fallado, calcular la probabilidad de que hayan sido el componente 1 y el componente 2.

SOLUCIÓN:

Sean los sucesos:

$$B = \{\text{"}han\ fallado\ dos\ de\ los\ cuatro\ componentes\}$$

$$A_{ij} = \{\text{"}han\ fallado\ exactamente\ el\ componente\ \text{"}i\text{"}\ y\ el\ \text{"}j\text{"}\}\,.$$

Por el Teorema de Bayes, se tiene que

$$P(A_{12}|B) = \frac{P(B|A_{12})\,P(A_{12})}{\sum\limits_{i<j} P(B|A_{ij})\,P(A_{ij})} = \frac{1\cdot P(A_{12})}{\sum\limits_{i<j} 1\cdot P(A_{ij})}.$$

$$= \frac{P(A_{12})}{P(A_{12}) + P(A_{13}) + P(A_{14}) + P(A_{23}) + P(A_{24}) + P(A_{34})}.$$

Dado que:

$$P(A_{12}) = 0,1\cdot 0,2\cdot(1-0,3)\cdot(1-0,4) = 0,0084$$

$$P(A_{13}) = 0,1\cdot(1-0,2)\cdot 0,3\cdot(1-0,4) = 0,0144$$

$$P(A_{14}) = 0,1\cdot(1-0,2)\cdot(1-0,3)\cdot 0,4 = 0,0224$$

$$P(A_{23}) = (1-0,1)\cdot 0,2\cdot 0,3\cdot(1-0,4) = 0,0324$$

$$P(A_{24}) = (1-0,1)\cdot 0,2\cdot(1-0,3)\cdot 0,4 = 0,0504$$

$$P(A_{34}) = (1-0,1)\cdot(1-0,2)\cdot 0,3\cdot 0,4 = 0,0864$$

se tiene que

$$P(A_{12}|B) = \frac{0,0084}{0,2144} = 0,0392.$$

3. Nivel 3

1. Decir si es verdera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo, y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo:

   "Si B y C son dos sucesos cualesquiera entonce se verifica que

   $$P(B|B\cap C) = \frac{P(B\cap(B\cap C))}{P(B\cap C)} = \frac{P(B)\,P(B\cap C)}{P(B\cap C)} = P(B)\text{"}$$

   SOLUCIÓN:

   Es falsa.

   Se verifica que

   $$P(B|B\cap C) = \frac{P(B\cap(B\cap C))}{P(B\cap C)} = \frac{P(B\cap C)}{P(B\cap C)} = 1$$

2. En la red de comunicaciones de 4 componentes conectados según la Figura 4, la probabilidad de que funcione el componente C_1 es de 0.99, la de C_2 es 0.99, la de C_3 es de 0.95 y la de C_4 es de 0.95. La red funciona si entre A y B es posible encontrar un camino de componentes que funcione. Se supone que la probabilidad de funcionar cada componente es independiente de los demás. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya comunicación entre A y B?

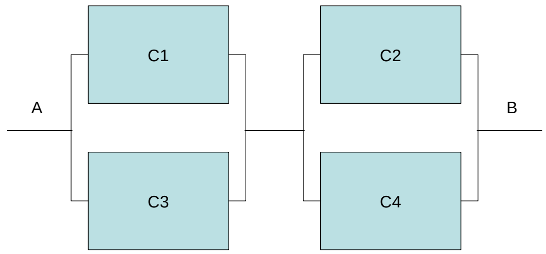

Figura 4: Red de comunicaciones

SOLUCIÓN:

Si se denota por C_{1234} al suceso "la red formada por los componentes 1,2,3 y 4 funciona", por C_{13} "la subred formada por el componente 1 y 3 funciona", y por C_{24} "la subred formada por el componente 2 y 4 funciona", la cuestión pregunta por $P(\overline{C_{1234}})$ y esta probabilidad es:

$$P(\overline{C_{1234}}) = 1 - P(C_{1234}) = 1 - P(C_{13} \cap C_{24}) = 1 - P(C_{13}) P(C_{24})$$

La probabilidad $P(C_{13}) = 1 - P\left(\overline{C_{13}}\right) = 1 - 0{,}01 \cdot 0{,}05 = 0{,}9995$ y de forma análoga $P(C_{24}) = 0{,}9995$, por lo que la probabilidad de que no haya comunicación es $P(\overline{C_{1234}}) = 1 - 0{,}9995^2 = 0{,}0010$.

Otra forma de hacerlo, aunque es más fácil equivocarse, sería:

$$P(C_{1234}) = P((C_1 \cup C_3) \cap (C_2 \cup C_4)) \overset{ind.}{=} P(C_1 \cup C_3) \cdot P(C_2 \cup C_4)$$
$$= (P(C_1) + P(C_3) - P(C_1 \cap C_3)) \cdot (P(C_2) + P(C_4) - P(C_2 \cap C_4))$$
$$\overset{ind.}{=} (0,99 + 0,95 - 0,99 \cdot 0,95) \cdot (0,99 + 0,95 - 0,99 \cdot 0,95) = 0,9995^2$$

y por tanto $P(\overline{C_{1234}}) = 1 - 0{,}9995^2 = 0{,}0010$.

3. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A|B) + P(B|A) = \frac{2}{3}$. Calcular $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$.

SOLUCIÓN:

Aplicando las leyes de Morgan, se tiene que

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B)$$

Para calcular $P(A \cap B)$ se utiliza que

$$\frac{2}{3} = P(A|B) + P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(A \cap B)\left(\frac{1}{1/3} + \frac{1}{1/5}\right) = 8P(A \cap B)$$

Por tanto $P(A \cap B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ y $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \frac{11}{12} = 0,917$.

4. La empresa "Aikon" tiene una planta de fabricación de teléfonos móviles. Se sabe que el 30 % de los teléfonos fabricados en dicha planta son defectuosos. Si un teléfono es defectuoso, la probabilidad de que un robot del Departamento de Calidad de la empresa lo detecte es 0,9 y si no es defectuoso, la probabilidad de que el robot lo considere defectuoso y lo saque de producción es de 0,2. Si un cliente compra dos teléfonos que no han sido sacados de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sean ambos no defectuosos?

   SOLUCIÓN:

   Sean los sucesos A "ser defectuoso", $\overline{A}$ "no ser defectuoso", R "el robot dice que es defectuoso" y $\overline{R}$ "el robot dice que no es defectuoso".

   Los datos del problema nos dicen que $P(A) = 0,3$, $P(R|A) = 0,9$ y que $P\left(R|\overline{A}\right) = 0,2$, por lo que $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 0,7$, $P\left(\overline{R}|A\right) = 1 - P(R|A) = 0,1$ y que $P\left(\overline{R}|\overline{A}\right) = 1 - P\left(R|\overline{A}\right) = 0,8$

   Se tiene por tanto que la probabilidad de que un teléfono que no ha sido sacado de la cadena de producción sea no defectuoso es

$$P\left(\overline{A}|\overline{R}\right) = \frac{P\left(\overline{R}|\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \frac{P\left(\overline{R}|\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right)}{P\left(\overline{R}|\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right) + P\left(\overline{R}|A\right) P(A)} = \frac{0,8 \cdot 0,7}{0,8 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,3} = 0,949$$

   Por tanto si un cliente compra dos teléfonos que no han sido sacados de la cadena de producción, la probabilidad de que sean ambos no defectuosos es $0,949 \cdot 0,949 = 0,901$.

5. En un sistema de comunicación, los mensajes se codifican en base 3, es decir, con los tres símbolos 0, 1 y 2. La probabilidad de emitir cualquiera de los tres símbolos es la misma y se ha observado que el 0 y el 2 nunca se confunden, es decir, la probabilidad de recibir 0 si se ha emitido 2 (respectivamente, recibir 2 si se ha emitido 0) es cero. Además, sea cual sea el símbolo que se emite, la probabilidad de recibir ese mismo símbolo es 0,9 y finalmente se sabe que cuando se emite 1, la probabilidad de recibir 0 y la probabilidad de recibir 2, es la misma. Calcular:

   a) La probabilidad de recibir 1.

   b) La probabilidad de que el símbolo emitido haya sido 0 si se recibió 0.

   SOLUCIÓN:

   a) Se definen los sucesos:

   $E_0 =$"se emite el símbolo 0", $E_1 =$"se emite el símbolo 1", $E_2 =$"se emite el símbolo 2", $R_0 =$"se recibe el símbolo 0", $R_1 =$"se recibe el símbolo 1" y $R_2 =$"se recibe el símbolo 2".

   Con esta notación, se tiene por los datos del enunciado que

$$P(E_0) = P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(R_0|E_2) = P(R_2|E_0) = 0$$

$$P(R_0|E_0) = P(R_1|E_1) = P(R_2|E_2) = 0,9$$

$$P(R_0|E_1) = P(R_2|E_1)$$

   Por tanto, la probabilidad de recibir 1 (usando el teorema de la probabilidad total) es

$$P(R_1) = P(R_1 \cap (E_0 \cup E_1 \cup E_2))$$

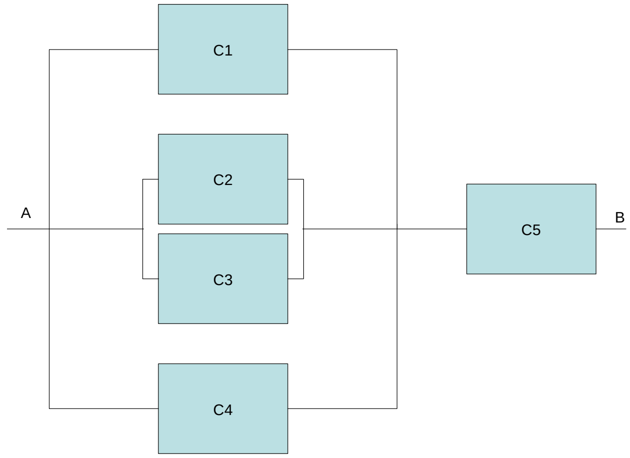

Figura 5: Red de comunicaciones

$$= P(R_1|E_0)\,P(E_0) + P(R_1|E_1)\,P(E_1) + P(R_1|E_2)\,P(E_2)$$
$$= (1 - P(R_0|E_0) - P(R_2|E_0)) \cdot \frac{1}{3} + 0,9 \cdot \frac{1}{3} + (1 - P(R_0|E_2) - P(R_2|E_2)) \cdot \frac{1}{3}$$
$$= (1 - 0,9 - 0) \cdot \frac{1}{3} + 0,9 \cdot \frac{1}{3} + (1 - 0 - 0,9)\,\frac{1}{3} = 0,3667$$

b) Para resolver este apartado se utiliza el teorema de Bayes, de forma que:

$$P(E_0|R_0) = \frac{P(R_0|E_0)\,P(E_0)}{P(R_0|E_0)\,P(E_0) + P(R_0|E_1)\,P(E_1) + P(R_0|E_2)\,P(E_2)}$$
$$= \frac{0,9 \cdot \frac{1}{3}}{0,9 \cdot \frac{1}{3} + P(R_0|E_1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}}$$

Dado que $P(R_0|E_1) = P(R_2|E_1) = x$, se tiene que al ser $P(R_1|E_1) = 0,9$, se verifica que $x + 0,9 + x = 1$ y por tanto $x = 0,05$. Por último

$$P(E_0|R_0) = \frac{0,9 \cdot \frac{1}{3}}{0,9 \cdot \frac{1}{3} + 0,05 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = 0,9474$$

6. En la red de comunicaciones de 5 componentes conectados según la Figura 5, la probabilidad de que funcione el componente C_1 es de 0,90, la de C_2 es 0,75, la de C_3 es de 0,75, la de C_4 es de 0,90 y la de C_5 es de 0,90. La red funciona si entre A y B es posible encontrar un camino de componentes que funcione. Se supone que la probabilidad de funcionar cada componente es independiente de los demás. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya comunicación entre A y B?

SOLUCIÓN:

Si se denota por C_{12345} al suceso "la red formada por los componentes 1,2,3, 4 y 5 funciona", por C_{1234} "la subred formada por los componentes 1, 2, 3 y 4 funciona", y por C_5 "la subred formada por el componente 5 funciona", la cuestión pregunta por $P(\overline{C_{12345}})$ que es:

$$P(\overline{C_{12345}}) = 1 - P(C_{12345}) = 1 - P(C_{1234} \cap C_5) = 1 - P(C_{1234})\,P(C_5)$$

La probabilidad $P(C_{1234}) = 1 - P\left(\overline{C_{1234}}\right) = 1 - P\left(\overline{C_1}\right) P\left(\overline{C_{23}}\right) P\left(\overline{C_4}\right)$ y dado que $P\left(\overline{C_{23}}\right) = P\left(\overline{C_2} \cap \overline{C_3}\right) = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625$, por lo que $P(C_{1234}) = 1 - P\left(\overline{C_1}\right) P\left(\overline{C_{23}}\right) P\left(\overline{C_4}\right) =$

$1-0,10\cdot 0,0625\cdot 0,10 = 0,999375$ y por tanto la probabilidad de que no haya comunicación es $P(\overline{C_{12345}}) = 1-0,999375\cdot 0,9 = 1-0,8994 = 0,1005625$.

Observar que otra manera de hacerlo es calcular

$$P\left(\left(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4}\right)\cup\overline{C_5}\right)$$
$$= P\left(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4}\right) + P\left(\overline{C_5}\right) - P\left(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4}\cap\overline{C_5}\right)$$
$$= 0,100625 - 0,0000625 = 0,10005625$$

Observar que no es cierto el razonamiento de que

$$P\left(\left(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4}\right)\cup\overline{C_5}\right) = P\left(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4}\right) + P\left(\overline{C_5}\right)$$

pues aunque $\overline{C_1}$, $\overline{C_2}$, $\overline{C_3}$, $\overline{C_4}$ y $\overline{C_5}$ son independientes (al serlo C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5), no se verifica que $\overline{C_1}$, $\overline{C_2}$, $\overline{C_3}$, $\overline{C_4}$ y $\overline{C_5}$ sean disjuntos (es más, se verifica lo contrario: si dos sucesos son independientes entonces forzosamente no son disjuntos, ver más detalles en esta hoja de ejercicios en el apartado de ejercicios intermedios).

7. Decir si es verdera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo, y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo:

   “Si $B\subset A$ con $0 < P(A) < 1$, entonces B y A no pueden ser independientes".

   SOLUCIÓN:

   Es verdadera.

   Si $B\subset A \Rightarrow A\cap B = B \Rightarrow P(A\cap B) = P(B)$, por tanto para que $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$, se tendría que sería necesario que $P(A) = 1$.

8. Se dispone de una red de tres impresoras A, B y C con distinta calidad de funcionamiento en la impresión. A la hora de imprimir un documento, la red lo puede enviar a una (y sólo una) de las tres impresoras con probabilidades 0,6, 0,3 y 0,1 respectivamente. Existe la posibilidad de que dichas impresoras destruyan el documento por posibles atascos y esto ocurre con probabilidades 0,01, 0,05 y 0,04 respectivamente. Se pide:

   a) ¿Es casualidad que $0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$? Justificar la respuesta.

   b) ¿Es casualidad que $(0{,}01 + 0{,}05 + 0{,}04)\cdot 10 = 1$? Justificar la respuesta.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que un documento se destruya?

   d) Supuesto que un documento se ha destruido, determinar la impresora que con mayor probabilidad ha sido la cuasante de su destrucción.

   e) ¿Se puede repetir el apartado d) con los datos de destrucción por impresora de 0,01, 0,03 y 0,04? En caso de que se pueda, ¿qué se aprecia en relación al apartado d) con los datos 0,01, 0,05 y 0,04?

   SOLUCIÓN:

   a) No es casualidad, ya que el documento o bien se imprime por A, o bien por B o bien por C pero no por más de una a la vez, por lo que la suma de probabilidades tiene que ser la probabilidad del suceso seguro, que es uno.

b) Es casualidad, ya que si se denota por D al suceso "el documento se destruye", los datos del problema afirman que

$$P(D|A) = 0{,}01,\ \ P(D|B) = 0{,}05,\ \ P(D|C) = 0{,}04$$

y no se tiene por qué verificar que $P(D|A) + P(D|B) + P(D|C) = 1$.Sí se tiene que verificar que $P(A|D) + P(B|D) + P(C|D) = 1$.

c) Por el teorema de la probabilidad total (TPT) , ya que A, B, C son disjuntos y su unión es el suceso seguro:

$$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0{,}025$$

Es incorrecto todo el siguiente razonamiento (ya que no tiene en cuenta el TPT): "Sea D_A el suceso "el documento lo destruye la impresora A", D_B el suceso "el documento lo destruye la impresora B" y D_C el suceso "el documento lo destruye la impresora C", con lo que

$$P(D) = P(D_A \cup D_B \cup D_C) = 1 - P\left(\overline{D_A \cup D_B \cup D_C}\right)$$
$$= 1 - P\left(\overline{D_A} \cap \overline{D_B} \cap \overline{D_C}\right) = 1 - P\left(\overline{D_A}\right) P\left(\overline{D_B}\right) P\left(\overline{D_C}\right) = 0,0972''$$

d) Por el teorema de Bayes

$$P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D)} = 0{,}24$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B) \cdot P(B)}{P(D)} = 0{,}6$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D)} = 0{,}16$$

La impresora que con mayor probabilidad ha sido la causante de la destrucción del documento es la B.

e) Por el teorema de Bayes

$$P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D)} = 0{,}32$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B) \cdot P(B)}{P(D)} = 0{,}47$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D)} = 0{,}21$$

La impresora que con mayor probabilidad, con los nuevos supuestos, ha sido la causante de la destrucción del documento sigue siendo la B. Observar que en el apartado d) se daba que $P(D|B)$ era la mayor de las probabilidades $P(D|A), P(D|B), P(D|C)$ y que se daba que $P(B|D)$ era la mayor de las probabilidades $P(A|D), P(B|D), P(C|D)$. Sin embargo en el apartado e) se da que $P(D|C)$ es la mayor de las probabilidades $P(D|A), P(D|B), P(D|C)$ y sin embargo $P(C|D)$ no es la mayor de las probabilidades $P(A|D), P(B|D), P(C|D)$.

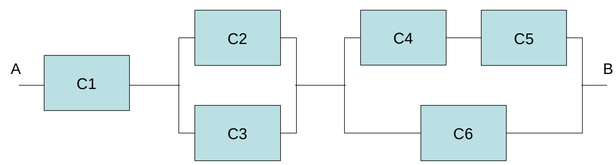

Figura 6: Red de comunicaciones

9. En el circuito eléctrico de seis componentes de la Figura 6, la probabilidad de que funcione cada uno de los componentes, independiente de los demás, es

$$P(C_1) = P(C_4) = P(C_5) = 0,9$$

$$P(C_2) = P(C_3) = P(C_6) = 0,85$$

Calcular:

a) La probabilidad de que el circuito funcione.

b) La probabilidad de que el circuito funcione sabiendo que el componente C_5 funciona.

c) La probabilidad de que el componente C_5 funcione si sabemos que el circuito ha funcionado

10. Decir si es verdera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo, y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo:

"Si dos sucesos son independientes entonces son incompatibles"

SOLUCIÓN:

Falsa. Se verifica que si son independientes entonces son compatibles. Para ver esto se puede razonar por reducción al absurdo.

Si fueran incompatibles entonces

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$$

con lo que

$$P(A)\, P(B) \neq P(A \cap B) = 0$$

(observar que habría que pedir en el enunciado que los dos sucesos tuvieran probabilidad de ocurrir estrictamente positiva).

11. Decir si es verdera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo, y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo:

"Si A y B son dos sucesos cualesquiera entonces la probabilidad de que ocurra exactamente uno de ellos es $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$"

SOLUCIÓN:

Verdadera. La probabilidad que se pide es

$$P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right)$$

y desarrollando dicha expresión, teniendo en cuenta que $A = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B)$ y que $B = \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$ se tiene que

$$P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) - P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cap B\right)\right)$$

$$= (P(A) - P(A \cap B)) + (P(B) - P(A \cap B)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

12. Un sistema de comunicaciones dispone de un transmisor que envía los símbolos $0, 1$ y 2 a través de un canal hasta un receptor. Este canal puede cambiar el símbolo transmitido. La probabilidad de que se reciba el mismo símbolo que se ha transmitido es de 0,8. Por otra parte la probabilidad de recibir de forma defectuosa un símbolo es igual con independencia del símbolo transmitido. Las probabilidades de transmisión de los símbolos $0, 1$ y 2 son de $0,5, 0,3$ y 0,2 respectivamente.

   a) Calcular las probabilidades de recibir $0, 1$ y 2 .
   b) Si se ha recibido un 1, calcular la probabilidad de que realmente se haya mandado un 1.
   c) En el caso de que las símbolos se transmitan de forma equiprobable, cómo se refleja este hecho en los apartados a) y b).

SOLUCIÓN:

a) Sean los sucesos:

$E_0 =$ "*enviar un cero*"
$E_1 =$ "*enviar un uno*"
$E_2 =$ "*enviar un dos*"
$R_0 =$ "*recibir un cero*"
$R_1 =$ "*recibir un uno*"
$R_2 =$ "*recibir un dos*"

Con los datos del enunciado:

$$P(R_0|E_0) = P(R_1|E_1) = P(R_2|E_2) = 0,8$$

$$P(R_1|E_0) = P(R_2|E_0) = a$$

$$P(R_0|E_1) = P(R_2|E_1) = b$$

$$P(R_0|E_2) = P(R_1|E_2) = c$$

Al ser $P(R_0|E_0) + P(R_1|E_0) + P(R_2|E_0) = 1$, se tiene que $a = 0,1$. De forma análoga $b = c = 0,1$. Por tanto

$$P(R_0) = P(R_0|E_0)\, P(E_0) + P(R_0|E_1)\, P(E_1) + P(R_0|E_2)\, P(E_2)$$

$$= 0,8 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,45$$

$$P(R_1) = P(R_1|E_0)\,P(E_0) + P(R_1|E_1)\,P(E_1) + P(R_1|E_2)\,P(E_2)$$
$$= 0,1 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,31$$

$$P(R_2) = P(R_2|E_0)\,P(E_0) + P(R_2|E_1)\,P(E_1) + P(R_2|E_2)\,P(E_2)$$
$$= 0,1 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,24$$

Se comprueba que $P(R_0) + P(R_1) + P(R_2) = 1$.

b) Se tiene que la probabilidad solicitada es

$$P(E_1|R_1) = \frac{P(R_1|E_1)\,P(E_1)}{P(R_1)} = \frac{0,8 \cdot 0,3}{0,31} = 0,77$$

c) En el caso de que $P(E_0) + P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{3}$, se tiene que el apartado a) es

$$P(R_0) = P(R_0|E_0)\,P(E_0) + P(R_0|E_1)\,P(E_1) + P(R_0|E_2)\,P(E_2)$$
$$= \frac{1}{3}(0,8 + 0,1 + 0,1) = \frac{1}{3}$$

Y de forma análoga $P(R_1) = P(R_2) = \frac{1}{3}$.

Por otra parte el apartado b) es

$$P(E_1|R_1) = \frac{P(R_1|E_1)\,P(E_1)}{P(R_1)} = \frac{0,8 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 0,8$$

Es decir, en esta situación

$$P(E_1|R_1) = P(R_1|E_1)$$

13. Decir si es verdera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo, y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo:

“Si $p_1 = P(A)$, $p_2 = P(B)$ y $p_3 = P(C)$ con A, B y C sucesos independientes, entonces se verifica que

$$P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = p_1p_2 + p_1p_3 - p_1p_2p_1p_3.\text{”}$$

SOLUCIÓN:

Es falsa.

$$P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))$$
$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = p_1p_2 + p_1p_3 - p_1p_2p_3.$$

14. Decir si es verdera o falsa la siguiente afirmación. En caso de que sea verdadera demostrarlo, y en caso de que sea falsa dar un contraejemplo:

“En general si A y B son dos sucesos cualesquiera, entonces siempre $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$.”

SOLUCIÓN:

Es verdadera.

Se verifica, al ser

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

que

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$